

Computer Science and Information Engineering
National Chi Nan University

數學遊戲
Mathematical Game

Lecture 5 魔方陣與數獨

Dr. Justie Su-Tzu Juan

阮夙姿

(c) Spring 2023, Justie Su-Tzu Juan

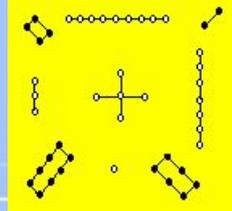
Mathematical Game (數學遊戲)

• 教學進度：

週次	課程主題	課程內容	評量方式
5	數獨與魔方陣 (單)	1. 數獨遊戲的介紹 2. 魔方陣的介紹 3. 橋牌主打與防禦基本技巧2	小組實作與練習 作業
6	桌上遊戲(二) (多)	1. Carcassonne遊戲之製作與講解 2. 橋牌主打技巧：第一章1	小組實作與練習 作業
7	移動遊戲與搶數遊戲 (雙)	1. 移動遊戲與其運算思維之介紹 2. 搶數遊戲與其運算思維之介紹 3. 橋牌主打技巧：第一章 2	五週PK賽1 作業
8	邏輯推理運算問題 (單)	1. 邏輯推理問題的介紹 2. 鴿籠原理問題的介紹與講解 3. 橋牌主打技巧：第一章3	五週PK賽2 作業



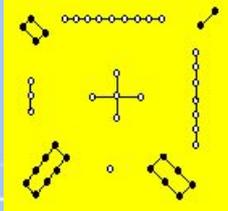
魔方陣



6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31



魔方陣

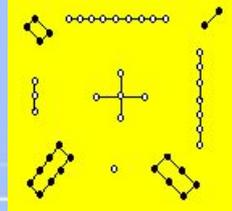


魔方陣(Magic Square)，以前稱之為縱橫圖、幻方

- 遊戲起源：是一種中國人最早發明的數學遊戲。
- 遊玩人數：1人
- 遊玩時間：10-30分鐘
- 遊戲量級：輕中
- 遊戲規則：一個 n 階魔方陣是把集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, n^2\}$ 的數字排成一個 n 列 n 行的方陣，使得這個方陣的每一行每一列及對角線上的數字總和相同，而且每一個數字均只出現一次。把一個魔方陣任意旋轉或翻面可以得到八個不同的方陣，但只能算是一種解法，因此三階魔方陣只有一種解法，古人稱之為九宮數。



魔方陣



- 遊戲歷史：

- 據說大禹治水時，在洛水發現一隻大烏龜，背上刻有圖案，若用數字表示就是三階魔方陣，所以後來此圖就被稱做洛書。

- 楊輝魔方陣：

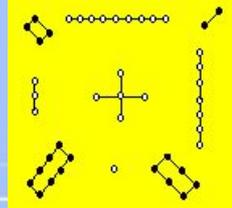
- 楊輝《續古摘奇算經》（1275年）

九子斜排	上下對易	左右相更	四維挺進																																																																
<table border="1"> <tr><td>1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td></td><td>6</td></tr> <tr><td>9</td><td></td><td></td></tr> </table>	1			4		2	7	5	3	8		6	9			<table border="1"> <tr><td>9</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td></td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td></td></tr> </table>	9			4		2	7	5	3	8		6	1			<table border="1"> <tr><td>9</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>8</td><td></td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td></td></tr> </table>	9			4		2	3	5	7	8		6	1			<table border="1"> <tr><td>9</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>↓</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>→</td><td>5</td><td>←</td><td>7</td></tr> <tr><td>8</td><td></td><td>↑</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	9			4	↓	2	3	→	5	←	7	8		↑	6	1			
1																																																																			
4		2																																																																	
7	5	3																																																																	
8		6																																																																	
9																																																																			
9																																																																			
4		2																																																																	
7	5	3																																																																	
8		6																																																																	
1																																																																			
9																																																																			
4		2																																																																	
3	5	7																																																																	
8		6																																																																	
1																																																																			
9																																																																			
4	↓	2																																																																	
3	→	5	←	7																																																															
8		↑	6																																																																
1																																																																			

戴九履一 左三右七
 二四為肩 六八為足
 （敘述此魔方陣的模樣）

4	9	2
3	5	7
8	1	6

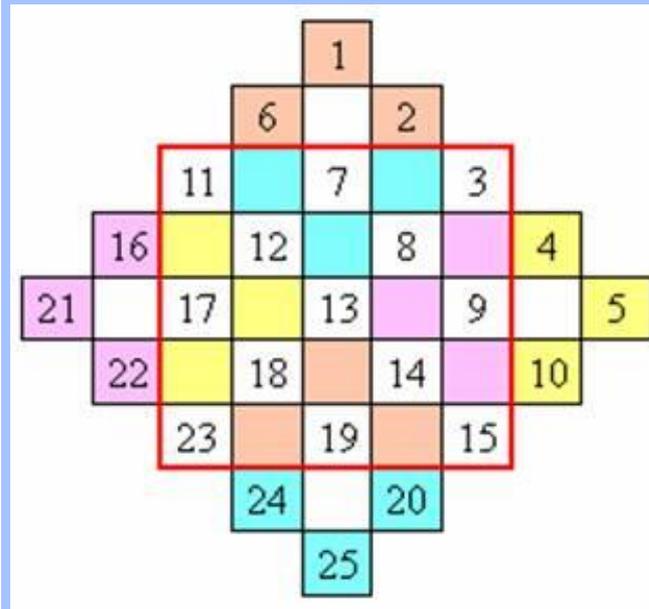
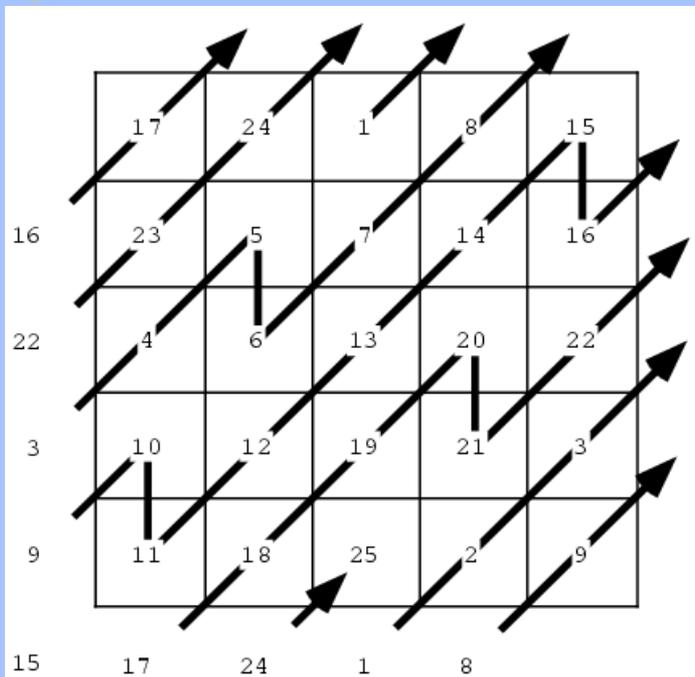
魔方陣



- 遊戲技巧：參考 <http://oddest.nc.hcc.edu.tw/mq2.htm>

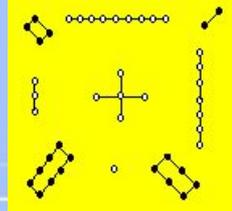
- 奇數：

- 簡捷連續填制法：最早是由 De La Laubere 所提出。
- 楊輝法



11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

魔方陣



- 遊戲技巧：參考 <http://oddest.nc.hcc.edu.tw/mq2.htm>

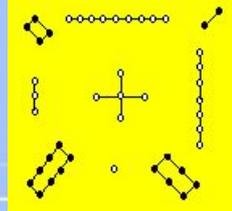
– 偶數：

- 斜角註記法(4k)：本法可視為我國古對換術的一種改良版本：「易換術曰：以十六子，依次遞作四行排列，先以外四子對換，一換十六、四換十三，以四內角對換，六換十一、七換十，橫直上下斜角，皆三十四數，對換止可施之於小。

	2	3			6	7	
9			12	13			16
17							
	26	2					
	34	3					
41							
49			52	53			54
	58	59			62	63	

64			61	60			57
	55	54			51	50	
8			5	4			1

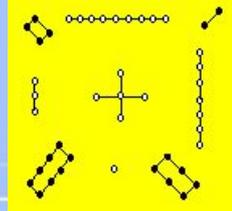
魔方陣



- 鬼方陣：又名妖方、複方、泛對角線魔方陣、泛魔方陣、循環魔方陣、全對稱幻方。
- 英文也有很多不同的稱呼，例：Pandiagonal Magic Squares、Continuous Magic Squares、panmagic squares
- 鬼方陣是一種比魔方陣更奇妙的方陣，因為他們有下列性質：
 - 行和、列和、對角線和全等於定和。
 - 所有**互補對角線和**也等於定和。
- 例：世界上最早被紀錄下來的四階鬼方陣

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

魔方陣



- 拉丁方陣 (Latin square)：是一種 $n \times n$ 的方陣，在這種 $n \times n$ 的方陣裡，恰有 n 種不同的元素，每一種不同的元素在同一行或同一列裡只出現一次。
- 例：

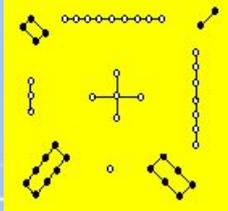
A	B	D	C
B	C	A	D
C	D	B	A
D	A	C	B

1	2	3
2	3	1
3	1	2

- 拉丁方陣有此名稱是因為瑞士數學家 and 物理學家歐拉使用拉丁字母來做為拉丁方陣裡的元素的符號。



魔方陣



- 魔方陣賞析
 - <http://home.educities.edu.tw/mario123/problems/magic-3.htm>
- 參考資料
 - 1. <http://oddest.nc.hcc.edu.tw/mqmain.htm>
 - 2. <http://home.educities.edu.tw/mario123/problems/magic-matrix.htm>
 - 3. <http://caterpillar.onlyfun.net/Gossip/AlgorithmGossip/FourNArray.htm>
 - 4. http://calculus.nctu.edu.tw/upload/calculus_web/maple/Site/carnival/magic/501.htm
 - 5. <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8B%89%E4%B8%81%E6%96%B9%E9%99%A3>
- 網路遊戲:
 - <http://oddest.nc.hcc.edu.tw/math191.htm>



數獨

5	3		7					
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9



數獨

5	3		7					
6			1	9	5			
	9	8					6	
8			6					3
4		8		3				1
7			2					6
	6					2	8	
			4	1	9			5
			8			7	9	

數獨 (Sudoku) / 瑞士數學家 萊昂哈德·歐拉 (Leonhard Paul Euler) (18世紀末)

- 遊戲起源：拉丁方陣之一種
- 遊玩人數：1人
- 遊玩時間：20-60分鐘
- 遊戲量級：輕中重
- 遊戲規則：在九個九宮格裡，填入1到9的數字，讓每個數字在每個行、列及九宮格裡都只出現一次。謎題中會預先填入若干數字，其他宮位則留白，玩家得依謎題中的數字分布狀況，邏輯推敲出剩下的空格裡是什麼數字。



數獨

5	3		7					
6			1	9	5			
	9	8					6	
8			6					3
4		8		3				1
7			2					6
	6					2	8	
			4	1	9			5
			8			7	9	

• 遊戲歷史：

- 數獨源起於**拉丁方陣** (Latin Square) 。
- 1970年代在美國發展，改名為**數字拼圖** (Number Place) 。
- 1980年代初期由西尾徹也改良後，流傳至日本並發揚光大，以數學智力遊戲智力拼圖遊戲發表。
- 1984年遊戲雜誌《パズル通信ニコリ》正式把它命名為**數獨**。
- 1997年3月，紐西蘭裔英籍香港退休法官韋恩·古德 (Wayne Gould) 到日本東京旅遊時無意中發現了。回國後他首先在英國的《泰晤士報》上發表，不久其他報紙也發表，很快便風靡全英國，之後他用了6年時間編寫了電腦程式，並將它放在網站上，使這個遊戲很快在全世界流行。
- 香港是在2003年7月30日由《AM730》引入數獨。
- 2005年5月30日起，台灣的中國時報也取得古德的授權，每天都刊出一則數獨謎題。
- 中國大陸則是在2007年2月28日正式引入。



數獨

5	3		7					
6			1	9	5			
	9	8						6
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

- 數獨的組合：66,7090,3752,0210,7293,6960種可能，在2005年由Bertram Felgenhauer利用窮舉法和邏輯計算出，如果將重複（如數字轉換，反射面等）不計算，那有5,472,730,538個組合。（一百年內要玩完，每天要玩149937個以上）
- 其他種類的數獨：
 - 拼圖數獨，是由 9×9 的方格陣組成，但內裏不是由9個 3×3 的九宮格組成，是由一些不規則的線段劃分。
 - 彩色數獨，是由 9×9 的方格陣組成，內裏是由9個 3×3 的九宮格組成，除原本的玩法外，另外再加上一條規例：部分方格內會上色彩，相同色彩的方格內的數字並不能相同。
 - 重疊數獨，由2或3個數獨合併而成，其中的一部分會重疊，玩法不變。
 - 巨無霸數獨，是由 12×12 的方格陣組成，內裏是由12個 $3(\text{直}) \times 4(\text{橫})$ 的九宮格組成。玩法不變。



數獨

5	3		7					
6			1	9	5			
	9	8					6	
8			6					3
4		8		3				1
7			2					6
	6					2	8	
			4	1	9			5
			8			7		9

- 解題技巧：分為直觀法及候選數法

直觀法：

- 唯一解法（唯一餘數法、二餘數法）
 - 基礎摒除法（宮摒餘法）
 - 唯餘解法（唯一解、唯餘摒除法、餘數測試法）
 - 區塊摒除法（區塊摒除法、行列摒除法）
 - 矩形摒除法
 - 單元摒除法
- Note: 一刀流，指從1開始，然後依23456789序解。



數獨

5	3		7					
6			1	9	5			
	9	8					6	
8			6					3
4		8		3				1
7			2					6
	6					2	8	
			4	1	9			5
			8			7	9	

候選數法：

- 唯一候選數法(Singles Candidature)
- 隱性唯一候選數法(Hidden Singles Candidature)
- 區塊刪減法(Locked Candidates)
- 數對刪減法(Naked Pairs)
- 隱性數對刪減法(Hidden Pairs)
- 三鏈數刪減法(Naked Triples)
- 隱性三鏈數刪減法(Hidden Triples)
- 矩形頂點刪減法(X-Wing)
- 三鏈列刪減法(Swordfish)
- 關鍵數刪減法(Colors, Colouring)
- 關連數刪減法(Forcing chains)



數獨

5	3		7					
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

- 參考資料
 - 1.維基百科
 - 2.台灣數獨發展協會<http://www.sudoku.org.tw/index.php?id=4>
 - 3. <http://den.idv.tw/sudo/sudo.php>
 - 4. <http://oddest.nc.hcc.edu.tw/sugo.htm>
 - 5. 全方位破解數讀，曹恆平著，博客思出版社。
- 作業：
 - 解出作業中所列魔方陣及數獨題目。
- 網路遊戲：
 - <http://oddest.nc.hcc.edu.tw/sudoku.swf>



橋牌入門



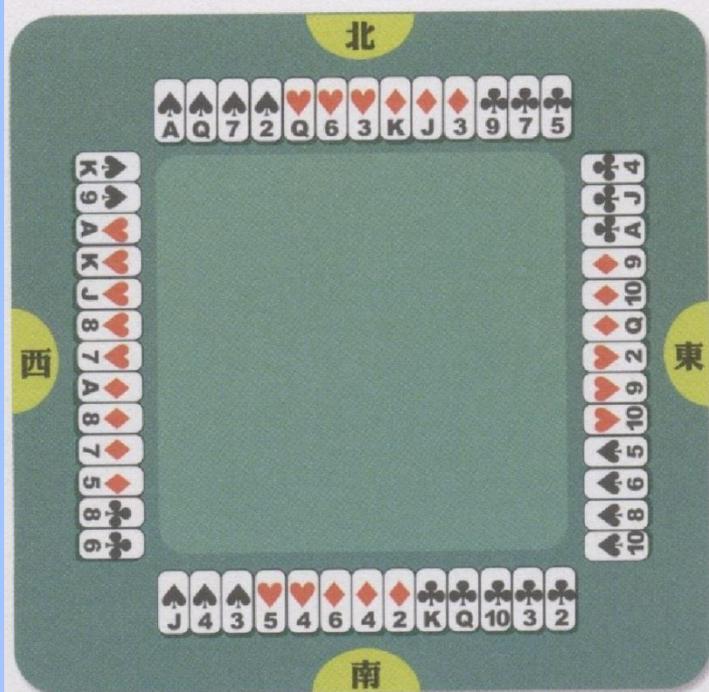
- 主打的技巧：
 - 判斷大牌在哪裡。
 - 偷牌。
 - 建次級大牌。
 - 建長門。
 - 清王(洗王)。

橋牌入門



問題八

承上題牌例，請問東西方與南北方最適合建立的長門各為哪一花色的牌組？



答案

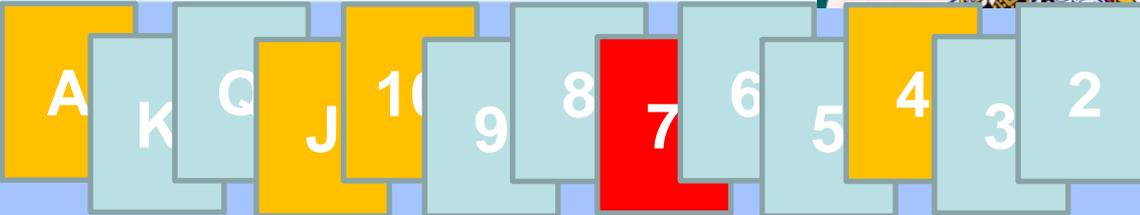
南北方為♣牌組，東西方為♥牌組。

說明

1. 南北方的梅花♣牌組有八張，南家缺♣A但有♣KQ可以進行偷牌建立法（期待偷東家的♣A）。
2. 東西方的紅心♥牌組有八張，紅心♥的大號碼牌張也很多，缺♥Q但有♥AK與♥J，可以進行偷牌建立法（期待偷南家的♥Q）。

橋牌入門



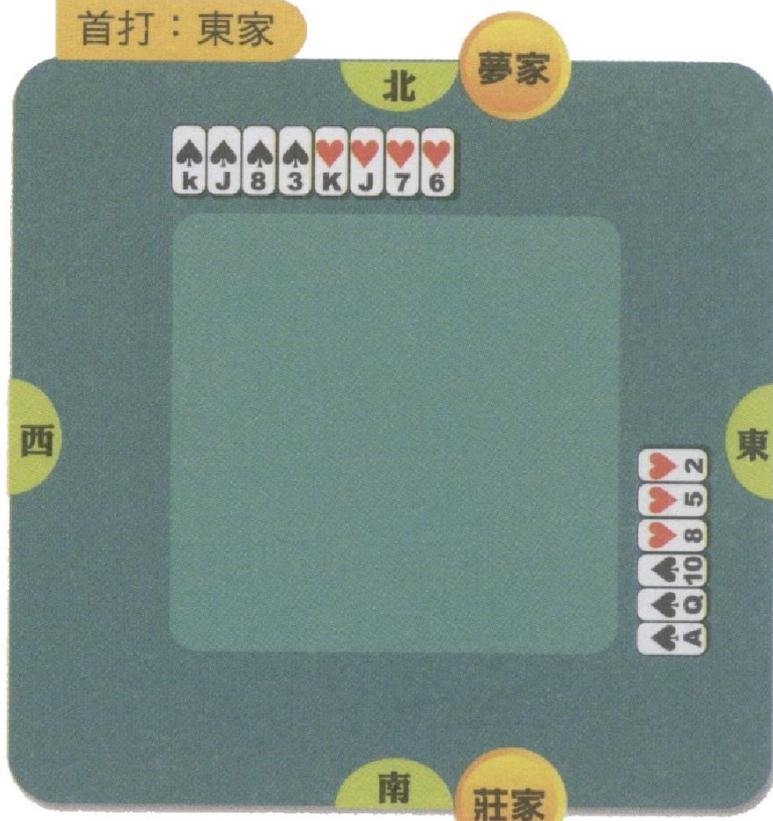
- 防禦的技巧：
 - 首引短門、首引長門、自連續大牌引牌。
 - 對抗無王合約則引長門第四張（11原則）。
 - 11原則：若首引為五張中的第四張，則以11減去首引牌面數字，則為外面比此牌大的牌張數。扣除夢家牌、自己手中牌，則可輕易判斷對方手中有幾張比此牌大的牌。
 - $(14 - x) - 3 = 11 - x$
 - 穿強擊弱。
 - 二家放小三家大。

橋牌入門

問題九

輪由東家首打，請問如果東家只剩下紅心♥跟黑桃♠這兩門花色可打，請問東家攻哪一門比較恰當呢？原因為何？

首打：東家



答案

紅心♥。

說明

兩門都不想攻，但是一定要攻一門時選擇攻紅心♥較好，因為♠AQ10無論如何必須等在夢家之後出牌才能完全看死夢家的♠KJ，只要東家自己先首打黑桃♠，就無法避免被夢家贏到一磴黑桃♠。攻紅心♥的可能發展則不確定。兩相權衡之下，寧可攻紅心♥也不主動首打絕對應該由同伴西家方位首打的黑桃♠。



橋藝主打技巧



- 參考資料
 - 第一次打橋牌就上手，楊欣龍著，易博士出版，2004。
- 實戰演練與提問。
- 下週準備教材：
 - 一組（四人）準備一份72張5cm×5cm（可更小）大小之厚紙板。（其中一面可事先著同色或同一種花紋）；
 - 一張A4大小紙張（微厚）；
 - 四色小標誌物（種子或橡皮擦），每色八個；
 - 彩色筆（含藍色、黑色、綠色、紅色佳）、黑色簽字筆及直尺；
 - （選配）一個盒子（裝紙牌用）或小塑膠袋。

